



在线刷题/模考 prep.testace.cn

GMAT

在线刷题

- 10000道历年真题·
- 5种练习模式·
- 一词聚题功能·
- 每题配置完整解析·

全真模考

- 500套自适应模考

GRE

在线刷题

- 8000道历年真题·
- 5种练习模式·
- 一词聚题功能·
- 每题配置完整解析·

全真模考

- 300套自适应模考

EA

在线刷题

- 5000道专属真题·
- 5种练习模式·
- 一词聚题功能·
- 每题配置完整解析·

全真模考

- 100套自适应模考

名师简介 Profiles of Elite Teachers



黄卓明

香港科技大学MBA毕业。长江商学院、曼彻斯特大学商学院（上海）中心特聘GMAT专家。华东师范大学兼职教授、中山大学国际金融学院职业导师。



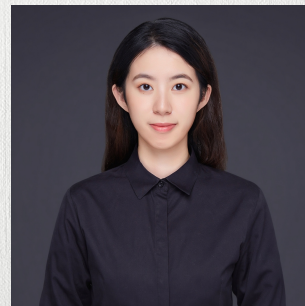
赵天乐（双硕士）

新加坡国立大学硕士，北大光华硕士 GMAT 770分、GRE 336分。11年北美定居工作经验，曾就职于北美top tier 商行，人力咨询，和券商。



夏鑫（博士）

管理学博士，毕业于上海财大和美国波士顿学院。长期多次亲临考场，实战教学为特色，分数稳定在GMAT760以上和GRE 335+



Helen Zhou（双硕士）

杜克大学硕士、南洋理工大学硕士，11年GMAT 一线教学名师。所著的《GMAT 绿皮书》，更是成为众多考生备考的“宝典”。

云帆美研

客服热线:
400-928-0005

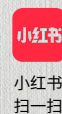
官网:
testace.cn



微信公众号



微信服务号



小红书
扫一扫



云帆GMAT



云帆GRE

1. 引言

表达式 $5x - 4 > 2x + 3$ 看起来像一个方程，但等号被箭头符号取代，这就是不等式的一个例子。

它表示左边的部分 $5x - 4$ 大于右边的部分 $2x + 3$ 。我们需要找出使这个不等式成立的 x 的值。

我们使用四个符号来表示不等式：

关键点

$>$ 大于

\geq 大于或等于

$<$ 小于

\leq 小于或等于

注意：箭头始终指向较小的表达式。

2. 不等式的变形

不等式可以像方程一样进行变形，遵循非常相似的规则，但有一个重要的例外情况。

不等式两边同时加上同一个数，不等式仍然成立。

不等式两边同时减去同一个数，不等式仍然成立。

不等式两边同时乘以或除以同一个正数，不等式仍然成立。

但是，如果不等式两边同时乘以或除以同一个负数，不等式将不再成立。实际上，不等式的方向会反转。这一点很容易理解，例如我们知道 $4 > 2$ ，但如果两边同时乘以 -1 ，得到 $-4 > -2$ ，这是不成立的。我们必须反转不等式符号，得到 $-4 < -2$ ，这样它才成立。

这在处理变量时会带来困难，因为变量可能是正数也可能是负数。考虑不等式 $x^2 > x$ ，看起来我们可以两边同时除以 x ，得到 $x > 1$ ，但实际上不能这样做。不等式 $x^2 > x$ 和 $x > 1$ 并不等价。因为在 $x > 1$ 中， x 显然大于 1 ，但在 $x^2 > x$ 中，我们必须考虑 x 为负数的情况——如果 x 是负数， x^2 （必然是非负的）总是大于 x 。事实上，这个不等式的完整解是 $x > 1$ 或 $x < 0$ 。解的第二部分之所以成立，是因为当 x 为负数时， x^2 始终大于 x 。在本单元中，我们将学习如何解这类不等式。解不等式时必须格外小心，确保不会无意中乘以或除以负数。例如，只有当 x 和 y 都是正数时， $x > y$ 才能推出 $x^2 > y^2$ 。

我们可以通过举例说明“ x 和 y 均为正数”这一条件的必要性：取 $x = 1$ ， $y = -10$ ，显然 $x > y$ ，但 $x^2 = 1$ ， $y^2 = 100$ ，此时 $y^2 > x^2$ 。

关键点

解不等式时：

两边可以同时加上同一个量

两边可以同时减去同一个量

两边可以同时乘以或除以同一个正数

如果两边同时乘以或除以同一个负数，必须反转不等式符号。

3. 解一些简单不等式

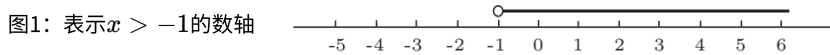
例1: 解不等式 $x + 3 > 2$

我们可以通过两边同时减去3来求解:

$$x + 3 - 3 > 2 - 3, \text{ 即 } x > -1$$

因此, 解为 $x > -1$, 这意味着所有大于-1的x值都满足 $x + 3 > 2$ 。

不等式可以用数轴表示, 如图1所示。实线部分表示x的取值范围, 在-1处画一个空心圆, 表示虽然实线从-1开始, 但x不能等于-1。

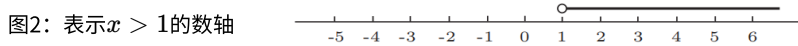


例2: 解不等式 $4x + 6 > 3x + 7$

首先两边同时减去6: $4x + 6 - 6 > 3x + 7 - 6$, 即 $4x > 3x + 1$

再两边同时减去3x: $4x - 3x > 3x + 1 - 3x$, 即 $x > 1$

这就是该不等式的解, 用数轴表示如图2所示。



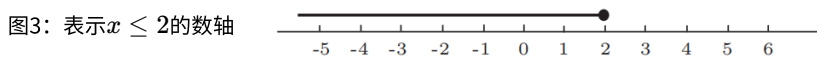
例3: 解不等式 $3x - 5 \leq 3 - x$

首先两边同时加上5: $3x - 5 + 5 \leq 3 - x + 5$, 即 $3x \leq 8 - x$

再两边同时加上x: $3x + x \leq 8 - x + x$, 即 $4x \leq 8$

最后两边同时除以4: $x \leq 2$

用数轴表示如图3所示, 实心圆表示x可以等于2。



例4: 解不等式 $-2x > 4$

为了解这个不等式, 我们需要两边同时除以-2, 此时必须记住: 除以负数要反转不等式符号, 因此 $x < -2$ 。

解不等式通常有多种方法, 我们用另一种方法再解一次:

由 $-2x > 4$, 两边同时加上 $2x$: $0 > 4 + 2x$

再两边同时减去4: $-4 > 2x$

最后两边同时除以2: $-2 > x$, 即 $x < -2$, 与之前的结果一致。

练习1

1. 用数轴表示下列每个不等式:

- a) $x > 3$ b) $x \leq 2$ c) $-1 < x \leq 2$ d) $x \geq 5$ e) $4 \leq x < 9$ h) $-6 < x < 2$

2. 写出对应下列各图所示范围的不等式。

3. 解下列不等式:

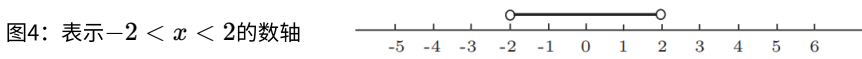
a) $3x \leq 9$ b) $2x + 3 \geq 15$ c) $-3x < 12$ e) $1 + 5x < 19$ f) $11 - 2x > 5$ g) $5x + 3 > 3x + 1$

4. 含绝对值符号的不等式

不等式常常与绝对值符号|结合出现, 例如 $|x| < 2$ 。

回顾: 一个数的绝对值是它的大小或绝对数值, 与符号无关。例如, $|3| = 3$, $|-3| = 3$ 。

回到 $|x| < 2$: 如果x的绝对值小于2, 说明x必须在-2和2之间, 可表示为 $-2 < x < 2$, 其数轴表示如图4所示。

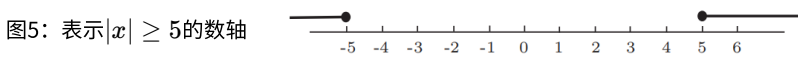


注意: $|x|$ 也表示数轴上某点到原点的距离。例如, 点2和点-2到原点0的距离都是2个单位, 因此它们的绝对值都是2。 $|x| < 2$ 表示所有到原点距离小于2个单位的点, 显然这些点构成区间 $-2 < x < 2$ 。

类似地, $|x - 4| < 2$ 表示所有到点4的距离小于2个单位的点, 这些点构成区间 $2 < x < 6$ 。

例1: 解不等式 $|x| \geq 5$

$|x| \geq 5$ 表示x的绝对值大于或等于5, 即x大于或等于5, 或x小于或等于-5, 可表示为 $x \geq 5$ 或 $x \leq -5$, 其数轴表示如图5所示。



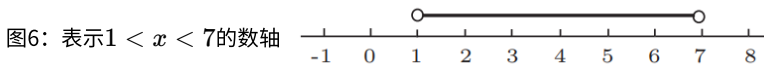
例2: 解不等式 $|x - 4| < 3$

绝对值符号表示 $x - 4$ 的绝对值小于3, 即 $-3 < x - 4 < 3$, 这是一个双不等式, 我们需要将其拆分为两个独立的不等式来处理。

左边: $-3 < x - 4$, 两边同时加4得 $1 < x$

右边: $x - 4 < 3$, 两边同时加4得 $x < 7$

将两个解合并, 得到 $1 < x < 7$, 其数轴表示如图6所示。



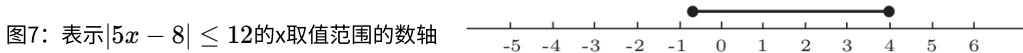
例3: 解不等式 $|5x - 8| \leq 12$

该不等式表示 $-12 \leq 5x - 8 \leq 12$, 同样是双不等式。

左边: $-12 \leq 5x - 8$, 两边同时加8得 $-4 \leq 5x$, 再两边同时除以5得 $-\frac{4}{5} \leq x$

右边: $5x - 8 \leq 12$, 两边同时加8得 $5x \leq 20$, 再两边同时除以5得 $x \leq 4$

合并结果, 得到解为 $-\frac{4}{5} \leq x \leq 4$, 其数轴表示如图7所示。



练习2

解下列不等式:

a) $|x| \leq 3$ b) $|x| > 6$ c) $|x - 4| \leq 3$ d) $|x - 2| \leq 5$

e) $|x + 1| < 3$ f) $|x + 4| \geq 2$ g) $|3 - x| > 1$ h) $|x + 1| \leq 0$

5. 用图像法解不等式

用图像法可以很容易地解不等式, 如果你对代数方法有任何不确定, 画图像验证是一个好方法。下面我们看看具体如何操作。

例1: 解不等式 $2x + 3 < 0$

这个不等式用代数方法很容易解，但作为图像法的例子非常合适。

首先画出 $y = 2x + 3$ 的图像，如图8所示。这是一条直线，斜率为2，y轴截距为3。

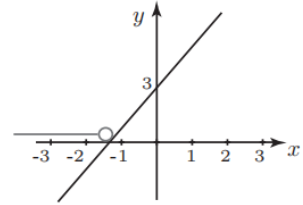


图8: $y = 2x + 3$ 的图像

注意：在x轴上， $y = 0$ ，因此图像与x轴的交点处， $y = 0$ ，此时 $x = -\frac{3}{2}$ 。

x轴上方的部分， $y > 0$ ；x轴下方的部分， $y < 0$ 。

我们要找的是使 $2x + 3 < 0$ 的x值，即图像中 $y < 0$ 的部分。通过观察图像可知，这对应于 $x < -\frac{3}{2}$ (即 $x < -1\frac{1}{2}$)，这就是不等式的解。我们在图像上用x轴作为数轴标记出了这个范围。

这种方法也适用于含绝对值的不等式，且此时图像法非常有帮助。

例2: 解不等式 $|x| - 2 < 0$

我们需要画出 $y = |x| - 2$ 的图像，如图9所示。

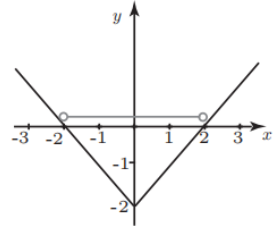


图9: $y = |x| - 2$ 的图像

我们要找的是使 $|x| - 2 < 0$ 的x值，即图像中 $y < 0$ 的部分。通过观察图像可知，此时 $-2 < x < 2$ ，这就是不等式的解。我们在图像上用x轴作为数轴标记出了这个范围。

练习3

通过绘制适当的图像解下列不等式：

a) $4x + 3 < 0$ b) $3 - 2x > 0$

d) $|x - 2| + 4 < 10$ e) $5x + 1 < 2x + 13$ f) $x^2 < 3x$

6. 二次不等式

解二次不等式需要格外小心。

例1: 解不等式 $x^2 - 3x + 2 > 0$

左边的二次表达式可以因式分解为 $(x - 2)(x - 1) > 0$ 。如果这是一个二次方程，我们只需令 $x - 2 = 0$ 和 $x - 1 = 0$ ，得到 $x = 2$ 和 $x = 1$ 。但对于不等式，情况更为复杂，我们需要做更多工作。

$(x - 2)(x - 1)$ 是否大于0，取决于两个因式 $(x - 2)$ 和 $(x - 1)$ 的符号。我们用表格（如图10所示）来分析所有可能的情况。

表格的第一行标注了 $(x - 2)(x - 1) = 0$ 的解，即 $x = 1$ 和 $x = 2$ 。

左起第一列写出两个因式 $(x - 1)$ 和 $(x - 2)$ ，左下角写出它们的乘积。

		1	2	
$x - 1$	-	+	+	
$x - 2$	-	-	+	
$(x - 1)(x - 2)$	+	-	+	

图10: 符号分析表格

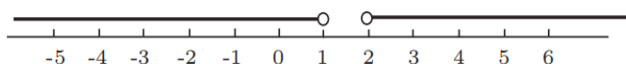
第二列对应 $x < 1$ 的情况：当 $x < 1$ 时， $x - 1$ 和 $x - 2$ 均为负数，因此我们在这一列标注“-”；它们的乘积为正数，因此标注“+”。

第三列对应 $1 < x < 2$ 的情况：在这个区间内， $x - 1$ 为正数， $x - 2$ 为负数，因此分别标注“+”和“-”；它们的乘积为负数，标注“-”。

第四列对应 $x > 2$ 的情况：两个因式均为正数，因此标注“+”；它们的乘积也为正数，标注“+”。

我们要找的是 $(x - 2)(x - 1) > 0$ 的情况，从表格中可以看出，当 $x < 1$ 或 $x > 2$ 时满足条件。因此，不等式的解为 $x < 1$ 或 $x > 2$ ，其数轴表示如图11所示。

图11: 表示 $x < 1$ 或 $x > 2$ 的数轴



例2: 解不等式 $-2x^2 + 5x + 12 \geq 0$

为了方便求解, 我们希望 x^2 的系数为正数而非负数, 因此将不等式两边同时乘以 -1 , 并反转不等式符号, 得到 $2x^2 - 5x - 12 \leq 0$ 。

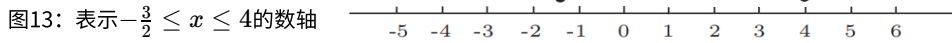
将二次表达式因式分解: $(2x + 3)(x - 4) \leq 0$ 。

再次制作符号分析表格: 第一个因式 $2x + 3 = 0$ 时, $x = -\frac{3}{2}$; 第二个因式 $x - 4 = 0$ 时, $x = 4$ 。将这两个数标注在表格的第一行, 如图12所示。

图12: 符号分析表格

当 $x < -\frac{3}{2}$ 时, 两个因式均为负数, 乘积为正数, 标注相应符号; 当 $-\frac{3}{2} < x < 4$ 时, $2x + 3$ 为正数, $x - 4$ 为负数, 乘积为负数; 当 $x > 4$ 时, 两个因式均为正数, 乘积为正数。

我们要找的是 $2x^2 - 5x - 12 \leq 0$ 的情况, 从表格中可以看出, 当 $-\frac{3}{2} \leq x \leq 4$ 时满足条件 (注意: 由于二次表达式在 $x = -\frac{3}{2}$ 和 $x = 4$ 处等于0, 因此这两个点应包含在解中)。该不等式的解的数轴表示如图13所示。



	$-\frac{3}{2}$	4	
$2x+3$	-	+	+
$x-4$	-	-	+
$(2x+3)(x-4)$	+	-	+

图 12 : 符号分析表格

二次不等式也可以用图像法求解, 如下例所示。

例3: 解不等式 $x^2 - 3x + 2 > 0$

考虑 $y = x^2 - 3x + 2$ 的图像, 如图14所示。该二次表达式因式分解为 $y = (x - 1)(x - 2)$, 因此图像与 x 轴的交点为 $x = 1$ 和 $x = 2$ 。我们要找的是 $x^2 - 3x + 2 > 0$ 的情况, 即图像中位于 x 轴上方的部分, 因此解为 $x < 1$ 或 $x > 2$ 。

我们可以用 x 轴作为数轴在图像上标记出这个解。

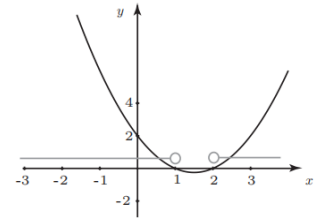


图 14 : $y = x^2 - 3x + 2$ 的图像

例4: 解不等式 $x^2 - x - 6 \leq 0$

二次表达式因式分解为 $(x - 3)(x + 2)$, $y = (x - 3)(x + 2)$ 的图像如图15所示。

图像与 x 轴的交点为 $x = -2$ 和 $x = 3$ 。我们要找的是 $x^2 - x - 6 \leq 0$ 的情况, 即图像中位于 x 轴上或 x 轴下方的部分, 通过观察图像可知, 解为 $-2 \leq x \leq 3$ 。

同样, 我们在图像上标记出这个解。

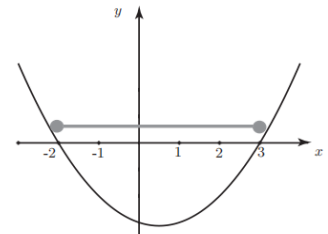


图 15 : $y = (x - 3)(x + 2)$ 的图像

练习4

用表格法解下列二次不等式, 并通过绘制相应的图像验证答案:

d) $10x^2 - 19x + 6 \leq 0$ e) $5 - 4x - x^2 > 0$ f) $1 - x - 2x^2 < 0$